ÎNTRODUCERE

Statica construcţiilor este una din disciplinele de bază în pregătirea studenţilor de la facultăţile de construcţii.

Prezenta culegere de probleme a fost întocmită în scopul de a se pune la dispoziţia studenţilor un număr cît mai mare de aplicaţii complet rezolvate, care să constituie un ajutor în studiul acestei discipline. Lucrarea poate fi consultată şi de inginerii din institutele de proiectare de specialitate, precum şi de studenţii altor facultăţi cu profil tehnic.

În general s-a căutat ca în ordinea de tratare a problemelor să se urmărească succesiunea din programa analitică a cursului de statica construcţiilor, prezentîndu-se cîteva exemple pentru fiecare tip de problemă, cu evidenţierea diferitelor particularităţi.

La începutul fiecărui capitol sînt expuse succint ideile de bază şi sînt date formulele utilizate în rezolvarea problemelor, considerîndu-se că cei care vor consulta această lucrare au studiat integral partea teoretică, fie din manualele de specialitate [13], [19], [25], fie la cursuri. De asemenea s-a urmărit ca problemele prezentate să fie de natura celor frecvent întîlnite în practica construcţiilor industriale şi inginereşti.

Culegerea de probleme se ocupă în exclusivitate cu calculul în domeniul elastic, acceptîndu-se următoarele ipoteze:

1) Materialele din care sînt executate construcţiile sînt perfect elastice, adică satisfac legea lui Hooke, a proporţionalităţii între eforturile unitare şi deformaţiile specifice;

2) Deplasările sistemului sînt mici în raport cu dimensiunile reale ale construcţiilor, astfel încît se pot considera infinit mici. În baza acestei ipoteze se admite scrierea ecuaţiilor de echilibru static pe schema nedeformată a construcţiei.

Ţinînd seama de aceste două ipoteze, în cele ce urmează se poate aplica principiul suprapunerii efectelor pentru calculul eforturilor şi deplasărilor, precum şi ecuaţiile mecanicii teoretice pentru scrierea condiţiilor de echilibru al corpurilor.

Din mecanica teoretică se cunosc condiţiile echilibrului static. Vectorial, aceste condiţii se exprimă prin două ecuaţii:

$$\overline{R}=0 \qquad \overline{M}=0 \tag{1}$$

Proiectînd ecuaţiile vectoriale (1) pe axele de coordonate se obţin, pentru cazul sistemelor spaţiale, 6 ecuaţii scalare:

$$\overline{R}=0;\quad \sum X=0,\ \sum Y=0,\ \sum Z=0 \qquad \overline{M}=0;\quad \sum M_x=0,\ \sum M_y=0,\ \sum M_z=0 \tag{2}$$

Ecuaţiile (1) sînt valabile pentru orice punct arbitrar din spaţiu.

Pentru sistemele de forţe plane, acţionînd, de exemplu, în planul xoy, din cele 6 ecuaţii rămîn numai 3, două ecuaţii de proiecţii pe axele ox şi oy şi o ecuaţie de moment în raport cu axa normală pe plan:

$$\sum X=0 \quad \sum Y=0 \quad \sum M_z=0. \tag{3}$$

Ecuaţiile de echilibru static se pot utiliza aşa cum sînt indicate în relaţiile (3) sau se pot folosi: o ecuaţie de proiecţie şi două de moment sau 3 ecuaţii de moment în raport cu 3 puncte necoliniare din plan.

În majoritatea capitolelor se studiază sistemele plane încărcate cu forţe aflate în planul lor. Observaţii referitoare la sistemele spaţiale se vor face la capitolele respective (XI şi XII).

Unităţile de măsură utilizate sînt cele obişnuite (MKfS), adică:

— pentru forţe — kilogramul forţă sau tona forţă;

— pentru lungimi — metrul.

În anexă sînt date unităţile de măsură atît în sistemul MKfS cît şi în sistemul internaţional.

1

CALCULUL REACŢIUNILOR

Structurile de rezistenţă sînt alcătuite din unul sau mai multe corpuri, legate între ele prin legături interioare .

Oricare ar fi alcătuirea structurii, ea trebuie să fie legată cu terenul prin diferite rezemări. În calculul static se acceptă numai legăturile idealizate de tipul celor descrise mai jos.

În plan, tipurile de rezemări sînt:

1) Reazemul simplu (fig. I.1, a) care împiedică deplasarea pe o direcţie (normală la planul de rezemare sau pe direcţia pendulului), lăsînd liberă deplasarea în planul de rezemare şi rotirea în jurul punctului de rezemare.

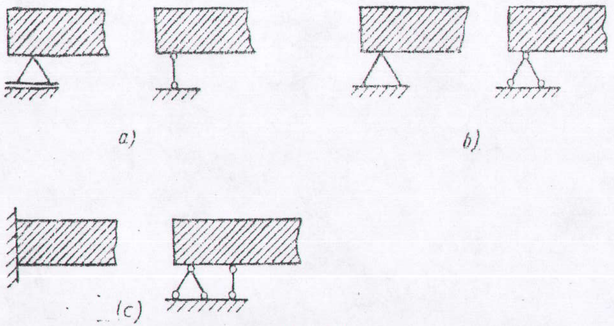


Fig. I.1.

Unui reazem simplu îi corespunde o reacţiune (forţă) cu punct de aplicaţie şi direcţie cunoscute (perpendiculară pe planul de rezemare). În calcule, reazemul simplu introduce o singură necunoscută: mărimea reacţiunii.

2) Articulația plană (fig. I.1, *b*), care împiedică deplasările de translație în plan, lăsînd liberă numai rotirea.

Articulației îi corespunde o reacțiune forță cu punct de aplicație cunoscut, dar de mărime și direcție necunoscută.

Reacțiunea se poate descompune după două direcții rectangulare (de exemplu, ox și oy), acceptînd ca necunoscute cele două componente ale ei.

3) Încastrarea (fig. I.1, *c*) suprimă orice posibilitate de deplasare. Încastrarea introduce în calcul o reacțiune forță, căreia nu i se cunoaște punctul de aplicație, direcția și mărimea.

Reducînd această forță în raport cu punctul de încastrare, se obțin un moment și două componente forță, adică trei necunoscute.

Reacțiunile se pot calcula pe cale analitică (utilizînd ecuațiile de echilibru static), pe cale grafică sau folosind principiul lucrului mecanic virtual.

a. Metoda analitică

Suprimînd legăturile și introducînd reacțiunile, structura devine un corp liber supus acțiunii forțelor exterioare date și a reacțiunilor.

Din mecanica teoretică se știe că dacă un corp este supus acțiunii unui sistem de forțe acționînd în planul său și dacă numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații de echilibru static se spune că acest corp este static determinat, iar ecuațiile de echilibru static sînt suficiente pentru rezolvarea problemei.

La un sistem de corpuri legate între ele prin legături interioare (de exemplu, articulații, reazeme simple etc.), calculul reacțiunilor se efectuează prin metodele cunoscute din mecanica teoretică, și anume prin separarea corpurilor sau prin tratarea echilibrului corpurilor în ansamblu, punînd și condițiile specifice legăturilor interioare existente.

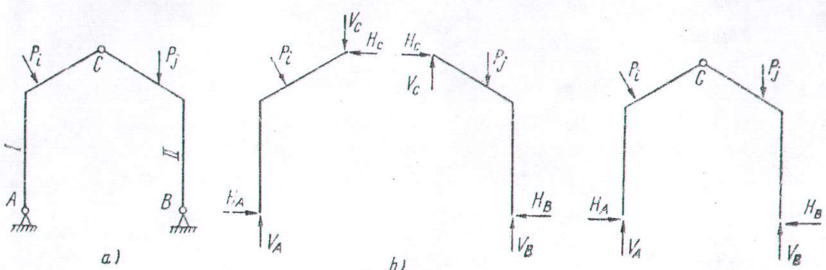


Fig. I.2

Aplicarea separării corpurilor introduce noțiunea de forțe de legătură interioare, care sînt perechi de forțe egale și de sens contrar (pe baza principiului acțiunii și reacțiunii).

De exemplu, structura din figura I.2 este alcătuită din două corpuri. Pentru calculul reacțiunilor se separă corpurile, se pun în evidență forțele de legătură exterioare și interioare și se scriu ecuațiile de echilibru static pentru fiecare corp în parte, obținîndu-se un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute, deoarece forțele de legătură sînt egale două cîte două.

Scriind echilibrul întregului sistem, rezolvarea se face utilizînd cele trei ecuații de echilibru static (pentru întreg ansamblul) și o ecuație de moment încovoietor egal cu zero, în raport cu articulația interioară din punctul C.

În ecuații intervin numai forțele din legăturile cu terenul (forțele din legăturile interioare nu apar). La structura din figura I.2, *a*, necunoscutele sînt V_A, H_A, V_B și H_B, iar ecuațiile ce se pot scrie pentru determinarea lor sînt: $\sum X=0$, $\sum Y=0$, $\sum M_z=0$, $M_{ic}=0$.

b. Metoda grafică

Se bazează pe concluziile obținute în mecanica teoretică referitoare la echilibrul unui corp supus acțiunii a trei forțe și anume: — pentru ca trei forțe situate în același plan, să fie în echilibru trebuie ca ele să fie concurente.

Pentru sistemele de bare acționate de forțe în planul lor, condiția de concurență dă posibilitatea determinării direcțiilor de acțiune a reacțiunilor, mărimea lor fiind determinată din poligonul închis al celor trei forțe.

Practic se determină întîi mărimea și direcția rezultantei forțelor exterioare, apoi din condiția de concurență a rezultantei cu reacțiunile ce acționează asupra corpului se obțin direcțiile reacțiunilor și ulterior mărimea lor din poligonul forțelor.

De exemplu, în figura I.3, *a* este reprezentat un sistem de două corpuri AC și BC încărcat cu forța exterioară P.

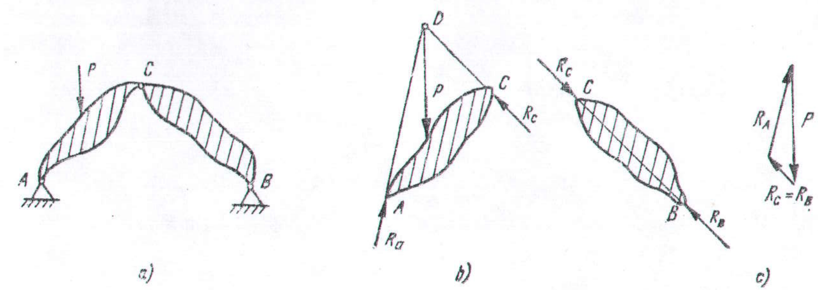


Fig. I.3.

Desfăcînd legătura interioară din C, fiecare corp trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și a celor de legătură.

Corpul BC este acționat de reacțiunile din B și C, care conform condiției de echilibru trebuie să fie coliniare, egale și de sens contrar (fig. I.3, *c*).

Corpul AC este solicitat de reacțiunea din C, de forța P și de reacțiunea din A. Cunoscînd direcția reacțiunii R_C și a forței P se determină punctul lor de intersecţie D. Punctul de aplicaţie a reacţiunii R_A este cunoscut (articulaţia A), punctul D este un al doilea punct de pe direcţia pe care acţionează R_A (condiţia de concurenţă a trei forţe în echilibru). În acest mod se determină direcţia reacţiunii R_A (fig. I.3, *b*).

Din poligonul forţelor se determină mărimea reacţiunilor R_A şi R_C şi apoi R_B, care este egală cu R_C. Sensul reacţiunii R_B rezultă din figura I.3, *c*.

În cazul forţelor paralele direcţiile reacţiunilor fiind cunoscute, trebuie determinată numai mărimea lor. Utilizînd poligonul forţelor şi poligonul funicular, se obţine mărimea reacţiunilor.

c. Metoda lucrului mecanic virtual

Pentru început se reamintesc noţiunile din mecanica teoretică referitoare la modul de determinare a centrelor instantanee de rotaţie şi teorema de coliniaritate ale acestor centre.

Centrul instantaneu de rotaţie este punctul în jurul căruia se roteşte un corp aflat în mişcare relativă. În statică, noţiunea de deplasare trebuie înţeleasă în sensul de deplasare infinitesimală.

Centrele instantanee se determină ca puncte de intersecţie a razelor vectoare normale pe direcţia vitezelor punctelor corpului.

Centrele de rotaţie ale corpurilor unui lanţ cinematic, dintre corpuri făcînd parte şi baza de susţinere, se împart în două categorii:

— centre instantanee absolute de rotaţie;
— centre instantanee relative de rotaţie.

Centrul absolut de rotaţie al unui corp este punctul care are viteza absolută egală cu zero.

Notînd corpurile lanţului cinematic cu *I*, *II* etc., centrul absolut de rotaţie se va nota cu *1p*, *2p* etc. Primul indice indică corpul căruia aparţine centrul de rotaţie, iar litera *p* indică faptul că centrul este absolut.

Centrul relativ de rotaţie a două corpuri este punctul în care cele două corpuri au deplasarea egală, sau, altfel exprimat, este punctul în care viteza relativă este nulă. Aceste centre se notează cu *12*, *23* etc., adică centrul relativ al corpurilor *I* şi *II*, *II* şi *III* etc.

Unele probleme de statică se pot rezolva utilizînd deplasările lanţurilor cinematice cu un grad de libertate.

Determinarea deplasărilor corpurilor se face pornind de la o deplasare cunoscută şi ţinînd seama de poziţia centrelor de rotaţie.

Un lanţ cinematic alcătuit din n corpuri are n centre absolute şi C_n^2 centre relative.

Poziţia centrelor de rotaţie se determină utilizînd teorema de coliniaritate, pornind de la centrele de rotaţie a căror poziţie se cunoaşte*.

Se reaminteşte teorema de coliniaritate a centrelor instantanee, a cărei demonstraţie este dată în cursurile de statică [13], [19].

* Observaţie. Pentru un mecanism, articulaţiile cu baza de susţinere sînt centre absolute, iar articulaţiile interioare sînt centre relative. Poziţia unora dintre centre este cunoscută prin datele problemei.

Trei centre instantanee de rotaţie a trei corpuri oarecare ale lanţului cinematic sînt coliniare.

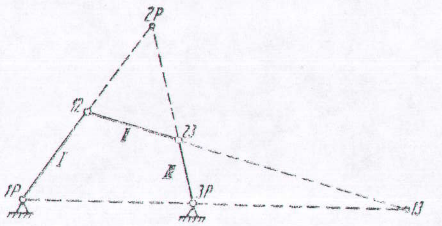
Se va arăta că centrele relative ale corpurilor *I*, *II* şi *III* sînt coliniare folosind notaţia *12 13 23* şi că centrele absolute ale corpurilor *I* şi *II* şi centrul relativ corespunzător sînt coliniare prin notaţia *1p*, *12*, *2p*.

Un centru de rotaţie se va obţine ca punct de intersecţie a două direcţii date de relaţii de genul celor arătate mai înainte.

Astfel, pentru lanţul cinematic din figura I.4 există:

— centre de rotaţie a căror poziţie este cunoscută (*1p*, *3p*, *12* şi *23*);
— centre de rotaţie a căror poziţie nu este cunoscută *2p* şi *13*.

Fig. I.4.



Centrul absolut *2p* al corpului *II* se determină cu ajutorul corpurilor *I* şi *III*, aplicînd teorema de coliniaritate:

— *2p* cu ajutorul corpului *I*, *2p 12 1p*;
— *2p* cu ajutorul corpului *III*, *2p 32 3p*.

La intersecţia celor două direcţii se află centrul *2p*.

Se observă că pentru a determina un centru absolut, trebuie să se pornească cu un corp al cărui centru absolut este cunoscut, precum şi centrul relativ al celor două corpuri.

Centrul relativ *13* se determină astfel:

— *13* cu ajutorul corpurilor *I* şi *III*, *13 1p 3p*;
— *13* cu ajutorul corpului *II*, *13 21 23*.

Cunoscînd poziţia centrelor de rotaţie, se pot determina proiecţiile pe o direcţie oarecare a deplasărilor corpurilor lanţului cinematic pentru o deplasare dată unui corp din lanţul cinematic.

În statică se utilizează în mod obişnuit proiecţiile deplasărilor pe direcţia orizontală şi pe direcţia verticală.

Deplasările raportate la cele două axe de referinţă se numesc epure de deplasări. În aceste epure, în dreptul centrelor absolute deplasările corpurilor sînt nule, iar în dreptul centrelor relative corespunzătoare două corpuri au deplasarea egală.

În figura I.5 s-au trasat epurele de deplasări pe orizontală şi verticală pentru o deplasare dată $\Theta_1 = 1$, în sensul acelor de ceasornic. Centrele de rotaţie se determină ca la sistemul din figura I.4.

Se observă că în cele două epure, în dreptul centrelor absolute *1p*, *2p* şi *3p* deplasările sînt nule, iar în dreptul centrelor relative *12*, *23* şi *13* deplasările corpurilor respective sînt egale.

Proiecția deplasării unui corp pe o direcție dată are o variație liniară, oricare ar fi forma corpului.

Epurele de deplasări se utilizează în calculul reacțiunilor și eforturilor din diferite secțiuni ale sistemelor static determinate, rezolvate prin metoda lucrului mecanic virtual.

Principiul lucrului mecanic virtual cunoscut din mecanica teoretică se enunță astfel; condiția necesară și suficientă pentru ca un corp să fie în echilibru este ca lucrul mecanic al forțelor exterioare ce acționează asupra corpului, parcurgînd deplasări infinitesimale, compatibile cu legăturile, să fie egal cu zero. Se demonstrează că și reciproca este adevărată.

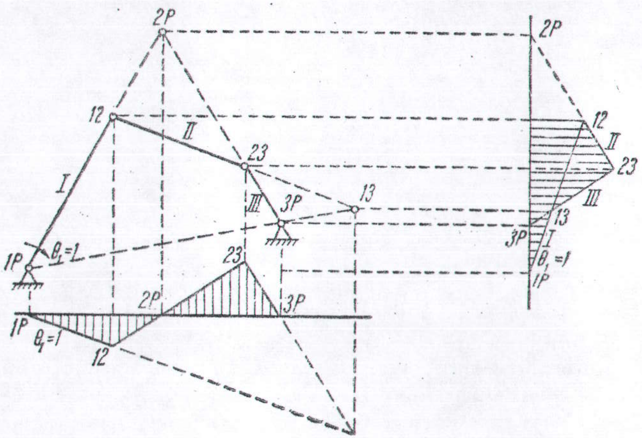


Fig. I.5.

În continuare se va prezenta modul de determinare a reacțiunilor utilizînd acest principiu.

Se presupune un sistem static determinat acționat de o serie de forțe date. Pentru a determina una din reacțiuni, se suprimă legătura corespunzătoare reacțiunii căutate și în locul ei se introduce o forță sau un moment, după caz.

Sub acțiunea forțelor date și a reacțiunii, care alcătuiesc sistemul de forțe exterioare, structura este în echilibru, însă avînd o legătură mai puțin a devenit mecanism cu un grad de libertate, deci poate avea anumite deplasări, funcție de un singur parametru.

Dînd unui corp din ansamblu o deplasare compatibilă cu legăturile sale și ținînd seama de legăturile celorlalte corpuri, precum și de poziția centrelor de rotație, se determină epurele de deplasări pe orizontală și verticală. Din epurele de deplasări se obțin proiecțiile deplasărilor punctelor de aplicație ale forțelor. Scriind ecuația de lucru mecanic virtual egal cu zero, se obține o ecuație cu o necunoscută, care este tocmai reacțiunea căutată. Dacă semnul reacțiunii este plus, atunci reacțiunea are sensul ales inițial, dacă semnul este minus înseamnă că reacțiunea este de sens invers.

În mod obișnuit, în problemele în care se va utiliza principiul lucrului mecanic virtual, se va alege deplasarea inițială astfel încît calculele să fie cît mai simple, iar necunoscuta căutată să apară direct.

Pentru aceasta se va alege deplasarea inițială egală cu unitatea și de sens contrar necunoscutei căutate.

Ecuația de lucru mecanic va avea forma: $S\delta_s+\Sigma P_i\eta_i=0$.

Alegînd $\delta_s=-1$, rezultă: $S=\Sigma P_i\eta_i$, unde s-a notat cu S necunoscuta problemei, cu δ_s deplasarea necunoscutei S, cu P_i — forța exterioară curentă, iar cu η_i — proiecția deplasării punctului de aplicație al forței P_i pe direcția acestei forțe.

APLICAȚII

Să se determine analitic reacțiunile din rezemări la următoarele sisteme:

Problema I.1 (fig. I.6). Se dau: $p=2$ tf/m; $P_1=6$ tf; $P_2=4$ tf; $a=2$ m; $\alpha=60°$.

Scriind ecuațiile de echilibru static, se obține:

$$\Sigma X=0$$

$$H_A+P_2\cos\alpha=0; H_A=-4\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}\ \text{tf};\quad H_A=-3{,}46\ \text{tf};$$

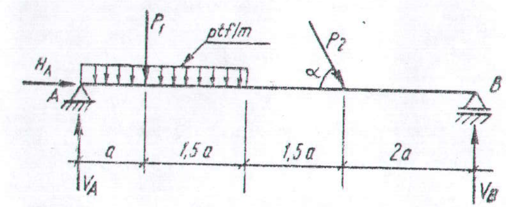


Fig. I.6.

$$\Sigma Y=0$$

$$V_A-P_1-p\,2{,}5\,a-P_2\sin\alpha+V_B=0;\quad V_A+V_B=6+10+2=18\ \text{tf};$$

$$\Sigma M_B=0$$

$$V_A\cdot 6\,a-P_1\cdot 5\,a-2{,}5\,ap\cdot 4{,}75\,a-P_2\frac{1}{2}\cdot 2\,a=0;$$

$$V_A=13{,}58\ \text{tf};\quad V_B=18-13{,}58=4{,}42\ \text{tf}.$$

Deoarece H_A a rezultat cu semnul (—) minus, înseamnă că sensul real este invers sensului considerat inițial în calcul.

Problema I.2 (fig. I.7). Se dau: $p=1$ tf/m; $P=4$ tf; $l=8$ m; $h=6$ m.

$$\sum X=0;\quad -H_A+P=0.$$

$$\sum Y=0;\quad V_A-p\frac{l}{2}+V_B=0.$$

$$\sum M_A=0;\quad -V_B\cdot l+p\frac{l}{2}\cdot\frac{3}{4}l+P\cdot h=0.$$

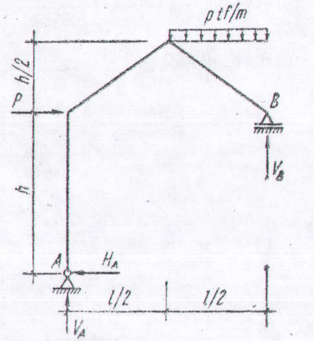


Fig. I.7.

Înlocuind cu valorile date, se obține:

$$H_A=4\ \text{tf};$$

$$V_B=\frac{1}{8}\left(1\cdot\frac{8}{2}\cdot\frac{3}{4}8+4\cdot 6\right)=6\ \text{tf}.$$

$$V_A=4-6=-2\ \text{tf}.$$

Determinarea reacțiunilor se mai poate efectua scriind două ecuații de moment și o ecuație de proiecție, pe o direcție care să nu fie normală pe dreapta ce unește cele două puncte față de care s-au scris ecuațiile de momente, sau scriind 3 ecuații de momente în raport cu 3 puncte care să nu fie coliniare.

$$\sum X=0;\quad H_A=4\ \text{tf}$$

$$\sum M_A=0;\quad V_B=6\ \text{tf}$$

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 8+H_A\cdot 6-p\frac{l}{2}\frac{1}{4}l=0$$

$$V_A=\frac{1}{8}(-24+8)=-2\ \text{tf}.$$

Sensul real al reacțiunii V_A este invers celui considerat inițial în calcul.

Problema I.3 (fig. I.8). Pentru rezolvare se folosește metoda separării corpurilor.

Se separă corpurile prin îndepărtarea legăturii interioare din punctul C și se pun în evidență componentele forțelor de legătură, ca perechi de forțe egale și de sens contrar pe cele două corpuri. Scriind ecuațiile de echilibru static pentru fiecare corp, se obțin două sisteme de ecuații din rezolvarea cărora rezultă valoarea necunoscutelor.

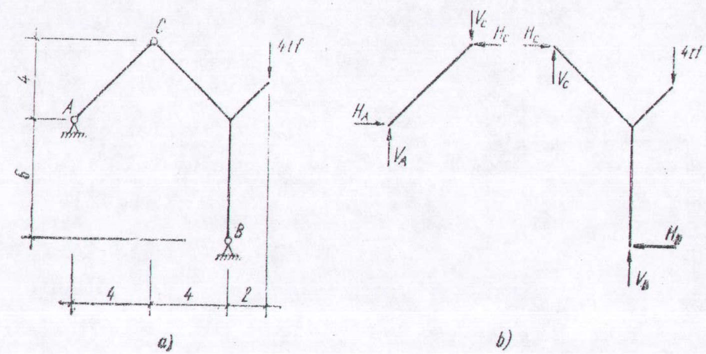


Fig. 18.

Corpul I

$$\sum X=0;\quad H_A-H_C=0\quad H_A=H_C$$

$$\sum Y=0;\quad V_A-V_C=0\quad V_A=V_C$$

$$\sum M_C=0;\quad V_A\cdot 4-H_A\cdot 4=0\quad V_A=H_A$$

Corpul II

$$\sum X=0;\quad H_C-H_B=0\quad H_C=H_B$$

$$\sum Y=0;\quad V_C+V_B-4=0\quad V_B+V_C=4$$

$$\sum M_C=0;\quad H_B\cdot 10-V_B\cdot 4+4\cdot 6=0\quad 10\cdot H_B-4\cdot V_B=-24$$

Rezolvînd sistemele de ecuații rezultă:

$$H_A=H_C=H_B=V_A=V_C$$

$$10\ H_B-4(4-H_B)=-24$$

$$14\ H_B=-24+16;\quad H_B=-0{,}57\ \text{tf}.$$

$$V_B=4+0{,}57=4{,}57\ \text{tf}.$$

Deoarece H_A, H_B și V_A au rezultat cu semnul minus (—), înseamnă că reacțiunile au sens invers celui considerat inițial în calcul.

Problema 1.4 (fig. I.9). Se dau: $p_0=2$ tf/m $P=4{,}5$ tf $l=9$ m $h=6$ m $a=2$ m. Determinarea reacțiunilor se efectuează folosind metoda separării corpurilor.

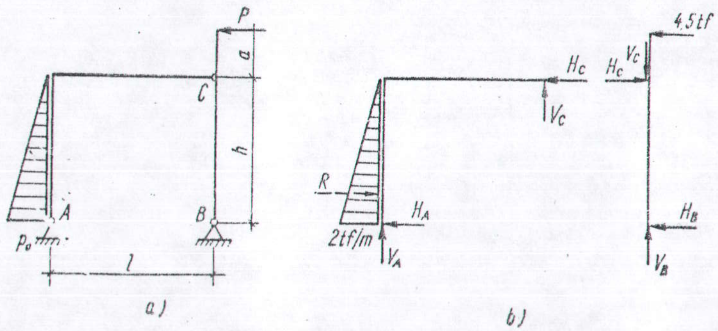
Se scriu ecuaţiile de echilibru pentru fiecare corp şi se obţine:

Corpul I:

$$\Sigma X=0 \quad 2\cdot 6\cdot \frac{1}{2}-H_A-H_C=0 \quad H_A+H_C=6$$

$$\Sigma Y=0 \quad V_A+V_C=0 \quad V_A=-V_C$$

$$\Sigma M_C=0 \quad V_A\cdot 9+H_A\cdot 6-2\cdot 6\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}6=0 \;\; 3V_A+2H_A=8.$$



Fie. I.9.

Corpul II:

$$\Sigma X=0 \quad H_B-H_C+4{,}5=0 \quad H_C-H_B=4{,}5$$

$$\Sigma Y=0 \quad V_B-V_C=0 \quad V_B=V_C$$

$$\Sigma M_C=0 \quad H_B\cdot 6-4{,}5\cdot 2=0 \quad 6H_B=9.$$

Din cele două sisteme de ecuaţii rezultă:

$$H_B=1{,}5 \text{ tf} \quad H_A=6-6=0 \quad V_B=V_C=-V_A=-\frac{8}{3} \text{ tf}$$

$$H_C=4{,}5+1{,}5=6 \text{ tf} \quad V_A=\frac{8}{3} \text{ tf} \qquad V_B=-\frac{8}{3} \text{ tf}.$$

Problema I.5 (fig. I.10). Grinda cu console şi articulaţii din figura I.10 se rezolvă prin descompunere în elementele componente.

Dacă pe grindă sînt forţe orizontale sau înclinate, efectul lor pe orizontală este preluat de reazemul fix (în cazul de faţă articulaţia *A*).

Reacţiunile verticale se determină din rezolvarea fiecărui corp în parte, pornind de la elementele care nu transmit efectul direct la teren, ci altor corpuri ale structurii.

În cazul de faţă, rezolvarea se va face în ordinea următoare:

1) *Grinda CD*:

$$\Sigma Y=0; \quad V_C+V_D-2\cdot 4=0$$

$$\Sigma M_D=0; \quad V_C\cdot 4-2\cdot 4\cdot 2=0 \quad V_C=4 \text{ tf}$$

$$V_D=8-4=4 \text{ tf} \qquad V_C=V_D.$$

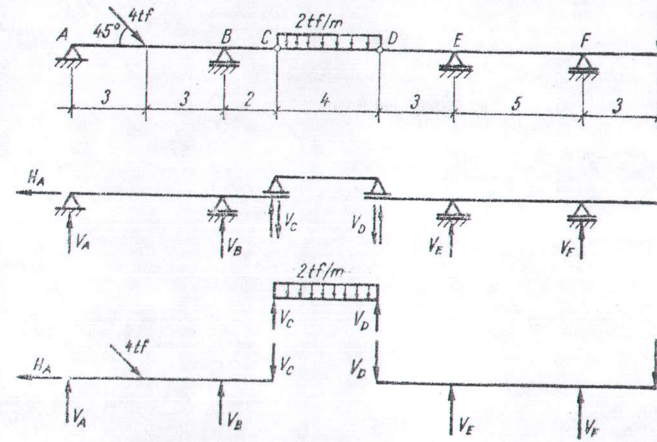


Fig. I.10.

2) *Grinda ABC*:

$$\Sigma X=0 \quad H_A-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \quad H_A=2\sqrt{2} \text{ tf}$$

$$\Sigma M_B=0 \quad V_A\cdot 6-4\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3+4\cdot 2=0 \quad V_A=\frac{4-3\sqrt{2}}{3} \text{ tf}$$

$$\Sigma Y=0 \quad V_B=\frac{20+15\sqrt{2}}{6} \text{ tf}.$$

3) *Grinda DEF*:

$$\Sigma M_F=0; \quad -4\cdot 8+V_E\cdot 5+2\cdot 3=0 \quad V_E=5{,}2 \text{ tf}$$

$$\Sigma Y=0; \quad V_F=6-5{,}2=0{,}8 \text{ tf} \qquad V_F=0{,}8 \text{ tf}.$$

Problema I.6 (fig. I.11). Pentru determinarea reacţiunilor se scriu cele 3 ecuaţii de echilibru static şi o ecuaţie de moment zero în raport cu articulaţia din $C(M_{ic}=0)$ a forţelor de la stînga sau de la dreapta:

$$\Sigma X=0; \quad -H_A+2\cdot 4-6=0$$

$$\Sigma Y=0; \quad V_A=V_B$$

$$\Sigma M_A=0; \quad -M_A+V_B\cdot 6-6\cdot 2+2\cdot 4\cdot\frac{4}{2}=0.$$

Pentru forţele de la dreapta articulaţiei:

$$M_{ic}=0; \quad -6\cdot 2+V_B\cdot 4=0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, rezultă:

$$H_A=2 \text{ tf}, \ V_B=3 \text{ tf}, \ V_A=3 \text{ tf}, \ M_A=22 \text{ tfm}.$$

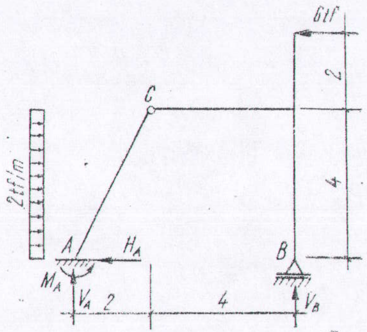


Fig. II.11.

Problema I.7 (fig. I.12):

$$\sum X=0; \quad -H_A-H_B+3=0$$
$$\sum Y=0; \quad V_A-1\cdot 4+V_B+V_C=0$$
$$\sum M_B=0; \quad V_A\cdot 8+3\cdot 6-1\cdot 4\cdot 6+8-V_C\cdot 6=0$$
$$M^s_{iD}=0; \quad V_A\cdot 4+H_A\cdot 8-3\cdot 2-1\cdot 4\cdot 2=0$$
$$M^d_{iE}=0; \quad -V_C\cdot 4+8=0.$$

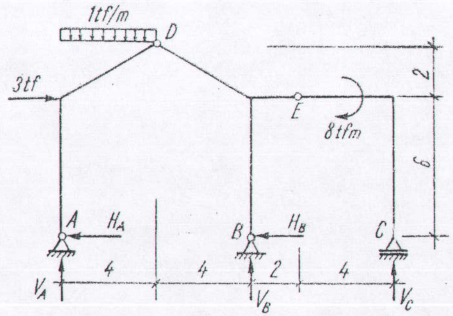


Fig. II.12.

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, se obţine:

$$V_C=2 \text{ tf}, \ V_A=\frac{10}{8} \text{ tf}, \ V_B=\frac{3}{4} \text{ tf}.$$

$$H_A=\frac{9}{8} \text{ tf}, \ H_B=\frac{15}{8} \text{ tf}.$$

O rezolvare mai rapidă a problemei este următoarea:

— Se determină reacţiunea V_C din condiţia de moment zero în articulaţia E pentru forţele de la dreapta:

$$M_{iE}=0; \quad -V_C\cdot 4+8=0; \quad V_C=2 \text{ tf}.$$

Apoi: $\sum M_B=0; \quad V_A\cdot 8+3\cdot 6-1\cdot 4\cdot 6+8-2{,}6=0; \quad V_A=\frac{10}{8}$ tf

$$\sum Y=0; \quad \frac{10}{8}-1\cdot 4-V_B-2=0 \quad V_B=\frac{3}{4} \text{ tf}$$

$$M_{iD}=0; \quad \frac{10}{8}\cdot 4-H_A\cdot 8-3\cdot 2-1\cdot 4\cdot 2=0; \quad H_A=\frac{9}{8} \text{ tf}$$

$$\sum X=0; \quad \frac{9}{8}-3+H_B=0; \quad H_B=\frac{15}{8} \text{ tf}.$$

Se elimină în acest mod rezolvarea sistemului de ecuaţii.

Problema I.8 (fig. I.13):

$$\sum X=0; \quad H_B-H_C=0$$
$$\sum Y=0; \quad V_A+V_B+V_C-3-2\cdot 3-2=0$$
$$\sum M_C=0; \quad V_A\cdot 8-2\cdot 3\cdot 6{,}5-3\cdot 6+V_B\cdot 4+2\cdot 1=0$$
$$M_{iD}=0; \quad V_A\cdot 3-2\cdot 3\cdot 1{,}5-3.1=0$$
$$M_{iE}=0; \quad V_A\cdot 5-2\cdot 3\cdot 3{,}5-3\cdot 3+V_B\cdot 1-H_B\cdot 4=0.$$

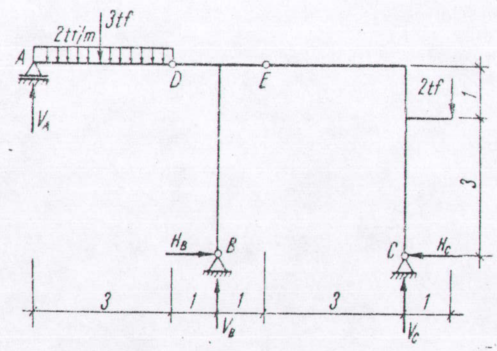


Fig. I.13

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, se obţine:

$$V_A=4 \text{ tf}, \ V_B=5\frac{3}{4} \text{ tf}, \ V_C=\frac{5}{4} \text{ tf}$$

$$H_B=-\frac{17}{16} \text{ tf}, \ H_C=-\frac{17}{16} \text{ tf}.$$

Sensul real al reacțiunilor H_B și H_C este invers decît cel considerat inițial în calcul.

Problema I.9 (fig. I.14). Calculul reacțiunilor la sistemul compus, din figură, se efectuează separîndu-l în două sisteme ABC și DEF. În prima etapă se rezolvă cadrul superior DEF. Reacțiunile determinate pentru cadrul superior se introduc ca acțiuni pe cadrul inferior.

Pentru fiecare din cele două cadre, calculul se efectuează printr-una din metodele aplicate mai înainte.

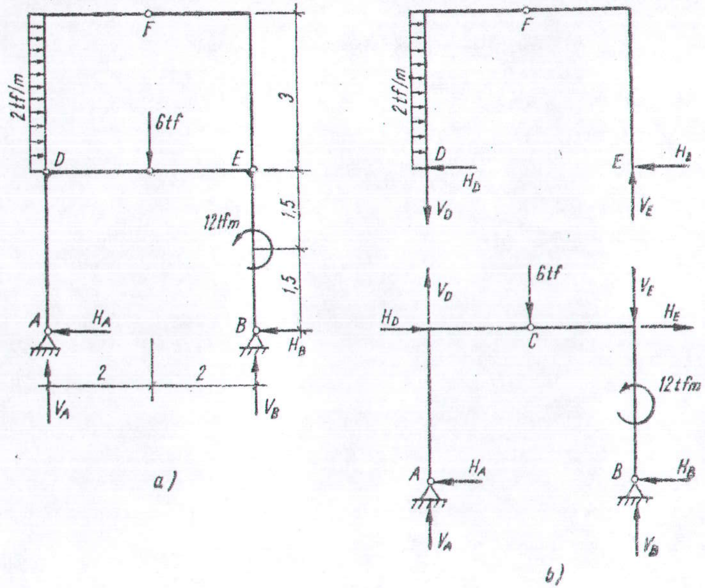


Fig. I.14.

Cadrul DEF:

$$\sum X=0;\quad H_D+H_E=6$$

$$\sum M_E=0;\quad 2\cdot 3\cdot 1{,}5-V_D\cdot 4=0$$

$$\sum Y=0;\quad V_D=V_E$$

$$M_{iF}=0;\quad H_D\cdot 3-2\cdot 3\cdot 1{,}5-V_D\cdot 2=0.$$

Rezultă: $V_D=2{,}25$ tf; $V_E=2{,}25$ tf; $H_D=4{,}5$ tf; $H_E=1{,}5$ tf.

Cadrul ABC:

$$\sum X=0;\quad H_A+H_B=H_D+H_E$$

$$\sum Y=0;\quad V_A+V_D-6-V_E+V_B=0$$

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 4+(H_D+H_E)\cdot 3+V_D\cdot 4-6\cdot 2-12=0$$

$$M_{iC}=0;\quad V_A\cdot 2+H_A\cdot 3+V_D\cdot 2=0.$$

Rezultă: $V_A=-\frac{3}{4}$ tf, $V_B=\frac{27}{4}$ tf,

$H_A=-1$ tf, $H_B=7$ tf.

V_A și H_A au rezultat cu semnul (—) minus, deci în realitate au sensul invers decît cel considerat inițial în calcul.

Problema I.10 (fig.I.15). Sistemul se descompune în trei structuri static determinate, cadrul cu trei articulații CED, precum și stîlpii în consolă AC și ED care se rezolvă separat începînd cu cadrul superior CED.

Cadrul CED

$$\sum X=0;\quad H_C=H_D$$

$$\sum Y=0;\quad V_C+V_D-1\cdot 2=0$$

$$\sum M_D=0;\quad V_C\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3=0$$

$$M_{iE}=0;\quad V_C\cdot 2-H_C\cdot 3-1\cdot 2\cdot 1=0.$$

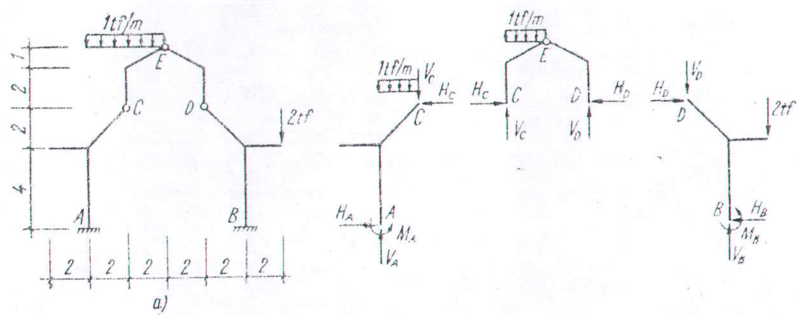


Fig. I.15.

Rezolvînd sistemul de ecuații se obține:

$$V_C=1{,}5 \text{ tf},\ V_D=0{,}5 \text{ tf},\ H_C=\frac{1}{3} \text{ tf},\ H_D=\frac{1}{3} \text{ tf}.$$

Consola AC

$$\sum X=0;\quad H_A=H_C=\frac{1}{3} \text{ tf}$$

$$\sum Y=0;\quad V_A=V_C+1\cdot 2=3{,}5 \text{ tf}$$

$$\sum M_C=0;\quad -M_A+V_A\cdot 2-H_A\cdot 6-1\cdot 2\cdot 1=0,\quad M_A=3 \text{ tfm}.$$

Consola BD

$$\sum X=0;\quad H_B=H_D=\frac{1}{3}\ \text{tf}$$

$$\sum Y=0;\quad V_B=V_D+2=2{,}5\ \text{tf}$$

$$\sum M_D=0;\quad -M_B+H_B\cdot 6+2\cdot 4-V_B\cdot 2=0,\quad M_B=5\ \text{tfm}.$$

Problema I.11 (fig. I.16). Se separă sistemul în trei structuri *I* (*CFEGD*), *II*(*AC*) și *III*(*BD*) și se rezolvă separat.

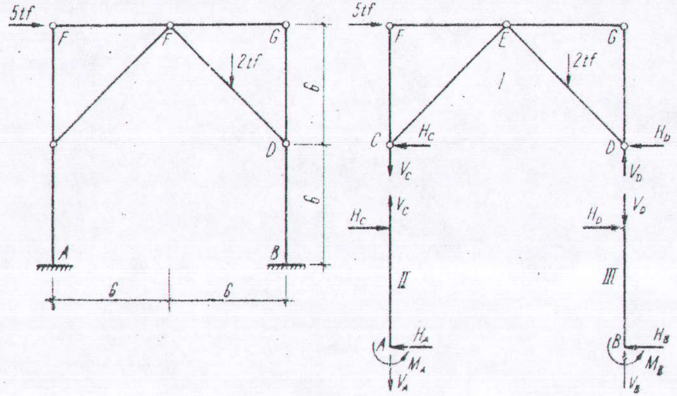


Fig. I.16.

Cadrul CFEGD

$$\sum X=0;\quad 5-H_C-H_D=0$$

$$\sum Y=0;\quad -V_C-2+V_D=0$$

$$\sum M_D=0;\quad 5\cdot 6-V_C\cdot 12-2\cdot 3=0$$

$$M_{iE}=0;\quad H_C\cdot 6-V_C\cdot 6=0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține:

$$V_C=2\ \text{tf},\quad V_D=4\ \text{tf},\quad H_C=2\ \text{tf},\quad H_D=3\ \text{tf}.$$

Consola AC

$$\sum X=0;\quad H_A=H_C=2\ \text{tf}$$

$$\sum Y=0;\quad V_A=V_C=2\ \text{tf}$$

$$\sum M_C=0;\quad -M_A+H_A\cdot 6=0,\quad M_A=12\ \text{tfm}.$$

Consola BD

$$\sum X=0;\quad H_B=H_D=3\ \text{tf}$$

$$\sum Y=0;\quad V_B=V_D=4\ \text{tf}$$

$$\sum M_D=0;\quad -M_D+H_B\cdot 6=0,\quad M_D=18\ \text{tfm}.$$

Să se determine centrele instantanee de rotație și să se traseze epurele de deplasări — pe orizontală și pe verticală — la următoarele mecanisme, pentru deplasarea virtuală indicată la fiecare caz în parte:

Problema I.12. Să se determine epurele de deplasări pentru $\theta_3=+1$, la mecanismul din figura I.17.

Centrele instantanee absolute și relative care apar direct pe schema mecanismului sînt: *1p*, *3p*, *12* și *23*.

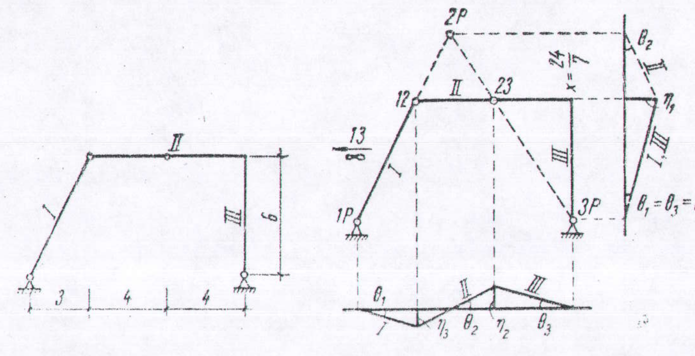


Fig. I.17.

Centrul absolut al corpului *II* se determină cu ajutorul teoremei de coliniaritate (fig. I.17, *b*):

$$\begin{matrix} 2p & 12 & 1p \\ 2p & 23 & 3p \end{matrix} \rightarrow 2p.$$

Centrul relativ al corpurilor I și III se determină în mod asemănător:

$$\begin{matrix} 13 & 1p & 3p \\ 13 & 12 & 23 \end{matrix} \rightarrow 13.$$

Se observă că centrul relativ *13* se află la infinit pe orizontală. Deoarece în dreptul acestui centru corpurile *I* și *III* au deplasarea egală (în epură se intersectează în acest punct), rezultă că ele în poziție deplasată sînt paralele, adică au același unghi de rotire:

$$\theta_1=\theta_3=1;\quad \theta_2=\frac{7}{4}$$

$$\eta_1=6\cdot\theta_3=6;\quad \eta_2=4\cdot\theta_3=4;\quad \eta_3=3\cdot\theta_1=3.$$

Problema I.13. Să se traseze epurele de deplasări pentru deplasarea articulației *A* pe verticală cu cantitatea $\Delta_v=1$, la mecanismul din figura I.18.

Centrele instantanee care apar direct pe figură sînt: *1 p*, *3 p*, *12*, *23*, *34*.

Celelalte centre instantanee se determină astfel:

$$\begin{array}{lll} 2p & 12 & 1p \\ 2p & 32 & 3p \end{array} \rightarrow 2p \qquad \begin{array}{lll} 24 & 23 & 34 \\ 24 & 2p & 4p \end{array} \rightarrow 24$$

$$\begin{array}{lll} 13 & 12 & 23 \\ 13 & 1p & 3p \end{array} \rightarrow 13 \qquad \begin{array}{lll} 14 & 13 & 34 \\ 14 & 1p & 4p \end{array} \rightarrow 14$$

$$\begin{array}{lll} 4p & 34 & 3p \end{array} \rightarrow 4p$$

$4p \perp$ pe reazem).

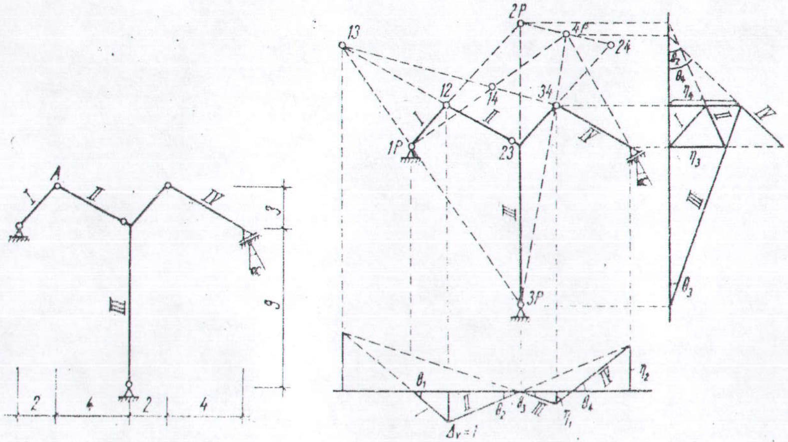


Fig. I.18.

Calculul deplasărilor:

$$\Delta v = 1, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = \frac{1}{4}.$$

Ţinînd seama de asemănarea triunghiurilor, se obţine:

$$\Delta(1p - 12 - 13) \sim \Delta(1p - 23 - 2p)$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{6}; \quad x = 9; \quad \theta_3 = \frac{2{,}25}{9} = \frac{1}{4}$$

$$\eta_3 = 9 \cdot \theta_2 = 2{,}25; \quad \eta_4 = \theta_3 \cdot 12 = 3; \quad \eta_1 = 2 \cdot \theta_3 = \frac{1}{2}.$$

θ_4 şi η_2 sînt funcţie de unghiul α.

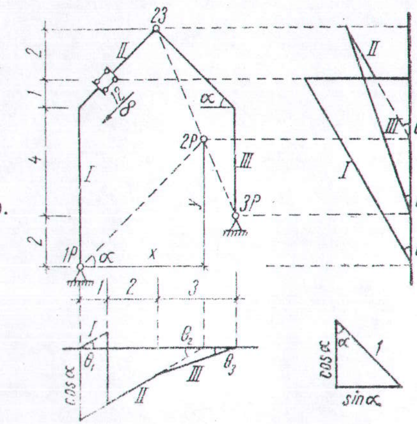
Problema I.14. Se dă deplasarea relativă a corpurilor I şi II, egală cu $\Delta = 1$. Se cer epurele de deplasări la mecanismul din figura I.19.

Centrul relativ 12 se află la infinit pe direcţia celor doi penduli de legătură dintre corpurile *I* şi *II*. De aceea, corpurile *I* şi *II* se deplasează paralel, rezultînd $\theta_1 = \theta_2$.

În figură, săgeţile indică sensul de deplasare a celor două corpuri. Întrucît deplasarea dată nu apare în adevărata mărime în epurele de deplasări, trebuie determinate proiecţiile ei pe verticală şi orizontală. Proiecţia deplasării pe verticală este $\cos\alpha$, iar pe orizontală $\sin\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}; \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Fig. I.19.



Pentru determinarea rotirilor θ_1, θ_2 şi θ_3 este necesar să se cunoască poziţia centrului absolut $2p$.

Din figură rezultă:

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{6}; \quad a = 1$$

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}.$$

$$y = \frac{2}{3}x \qquad (1)$$

$$\frac{6 - x}{6 - x + a} = \frac{y - 2}{y} \quad y = 14 - 2x. \qquad (2)$$

Introducînd în (1) rezultă:

$$x = 5{,}125 \text{ m}, \quad y = 3{,}75 \text{ m}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\cos\alpha}{x} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{5{,}125}.$$

Problema I.15. Să se determine reacțiunile H_A și V_B la structura din figura I.20, utilizînd ecuația de lucru mecanic virtual.

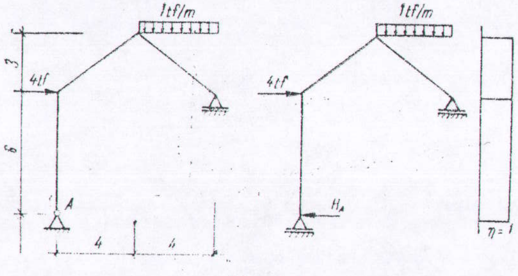


Fig. I.20.

Determinarea reacțiunii H_A

Se îndepărtează legătura corespunzătoare reacțiunii și se introduce o forță H_A pe direcția legăturii suprimate. Corpul este în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare, dar există posibilitatea unei deplasări pe direcția necunoscutei introduse.

Se observă că cele două reazeme simple permit deplasarea numai pe orizontală. Corpul se va deplasa paralel cu el însuși. Ecuația de lucru mecanic virtual egal cu zero este:

$$4\cdot 1-H_A\cdot 1=0.$$

De unde rezultă $H_A=4$ tf.

Determinarea reacțiunii V_B (fig. I.21).

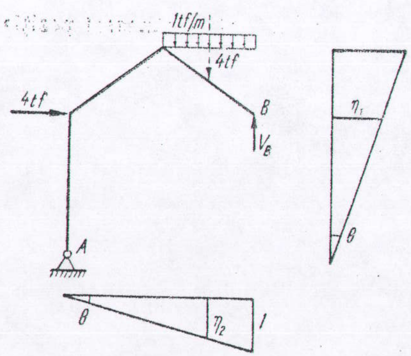


Fig. I.21.

Se trasează diagramele deplasărilor pe cele două direcții (orizontală și verticală) și se determină ordonatele deplasărilor în dreptul fiecărei forțe. Se scrie ecuația de lucru mecanic virtual, din care se calculează valoarea necunoscutei V_B.

$$\theta=\frac{1}{8};\qquad \eta_1=\frac{3}{4};\qquad \eta_2=\frac{3}{4}$$

$$4\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{3}{4}-V_B\cdot 1=0$$

$$V_B=6\ \text{tf}$$

Problema I.16. Să se determine reacțiunea H_B la structura din figura I.22, utilizînd ecuația de lucru mecanic virtual.

S-a înlocuit legătura corespunzătoare reacțiunii H_B cu o forță. Sistemul se transformă într-un mecanism cu posibilități de deplasare. Centrele relative de rotație se determină aplicînd teorema de coliniaritate.

Centrele *1p* și *12* fiind cunoscute, centrul absolut *2p* se află la intersecția direcției *1p—12* cu normala la reazemul simplu din *B*. Se trasează epura de deplasări pe orizontală, se determină deplasările forțelor și se scrie ecuația de lucru mecanic virtual egal cu zero.

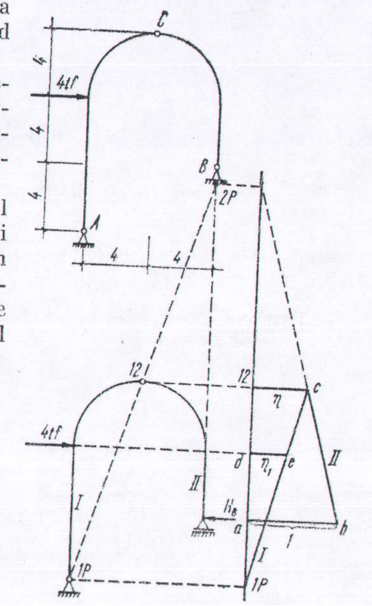


Fig. I.22.

Din asemănarea triunghiurilor:

$$\Delta(2p,\ 12,\ c)\sim\Delta(2p,\ a,\ b)$$

$$\frac{\eta}{1}=\frac{(2p-12)}{(2p-a)};\qquad \frac{\eta}{1}=\frac{12}{20}$$

$$\Delta(1p,\ 12,\ c)\sim\Delta(1p,\ d,\ e)$$

$$\frac{\eta}{\eta_1}=\frac{(1p-12)}{(1p-d)};\qquad \frac{\eta}{\eta_1}=\frac{12}{8}$$

$$\eta=\frac{12}{20}=\frac{3}{5};\qquad \eta_1=\frac{2}{5}$$

$$-H_B\cdot 1+4\cdot\frac{2}{5}=0\quad H_B=1{,}6\ \text{tf}.$$

Problema I.17. La sistemul de la aplicația I.16 să se determine reacțiunea V_B prin aceeași metodă (fig. I.23).

Se determină poziția centrului instantaneu *2p* din asemănarea de triunghiuri:

$$\Delta(1p,\ 2p,\ a)\sim\Delta(1p,\ 12,\ b)$$

$$\frac{(a,\,2p)}{(b,\,12)}=\frac{(a,\,1p)}{(b,\,1p)};\qquad (a,\,2p)=\frac{4\cdot 4}{12}=\frac{4}{3}.$$

Din diagrama deplasărilor pe verticală rezultă:

$$\frac{\eta}{1}=\frac{4-\frac{4}{3}}{8-\frac{4}{3}},\ \text{de unde}\ \eta=\frac{2}{5}.$$

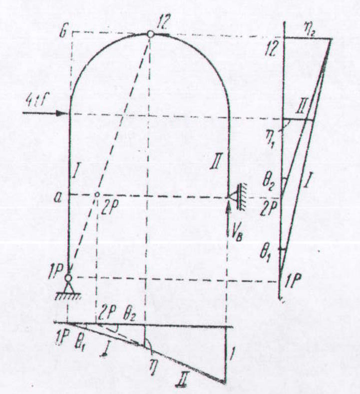


Fig. I.23.

Pentru a calcula η_1 este necesar să se cunoască valoarea rotirii θ_1:

$$\theta_1=\frac{\eta}{4}=\frac{\frac{2}{5}}{4}=\frac{1}{10},\qquad \text{apoi } \eta_1=\frac{1}{10}\cdot 8=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

Ecuația de lucru mecanic virtual este:

$$-V_B\cdot 1+4\cdot\frac{4}{5}=0,\ \text{adică } V_B=3{,}2\ \text{tf}.$$

Problema I.18. Să se determine reacțiunea H_B la structura din figura I.24, utilizînd ecuația de lucru mecanic virtual.

Se suprimă legătura corespunzătoare reacțiunii H_B și se introduce pe această direcție o forță.

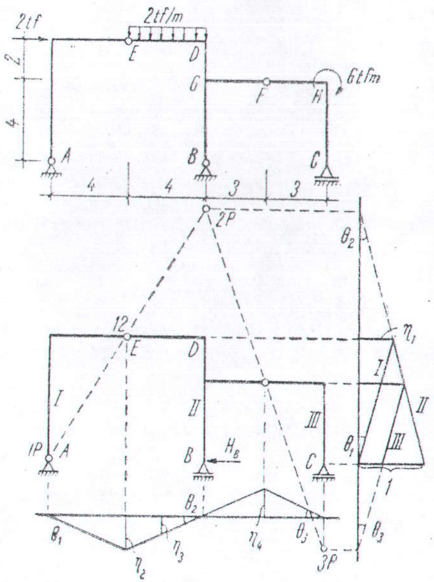


Fig. I.24.

În sistem sînt 3 corpuri. Centrele de rotație necunoscute se determină astfel:

$2p\leftarrow$ $2p$ 12 $1p$
$2p$ pe normala la reazemul simplu din B.

$3p\leftarrow$ $3p$ 23 $2p$
$3p$ pe normala la reazemul simplu din C.

Poziția centrelor absolute $2p$ și $3p$ se determină din asemănarea de triunghiuri:

$$\Delta(AB2p)\sim\Delta(2pED);\qquad (2pD)=6\ \text{m}$$

$$\Delta(2pGF)\sim\Delta(FH3p);\qquad (c3p)=4\ \text{m}$$

$$\theta_2=\frac{1}{12};\qquad \theta_1=\frac{\eta_1}{6}=\theta_2$$

$$\eta_1=\frac{1}{2};\quad \eta_2=\theta_1\cdot 4=\frac{1}{3};\quad \eta_3=\frac{1}{2}\eta_2=\frac{1}{6};\quad \eta_4=\theta_2\cdot 3=\theta_3\cdot 3$$

Deci $\theta_3=\theta_2=\frac{1}{12}$.

— Ecuația de lucru mecanic virtual:

$$-H_B\cdot 1+2\cdot\eta_1+2\cdot 4\cdot\eta_3+6\cdot\theta_3=0$$

$$H_B=\frac{17}{6}\ \text{tf}.$$

Să se determine grafic reacțiunile la următoarele sisteme:

Problema I.19 (fig. I.25). Se construiește poligonul forțelor și poligonul funicular. Ambele trebuie să fie închise, pentru ca rezultanta R să fie egală cu zero și momentul M pentru orice punct din plan să fie egal cu zero.

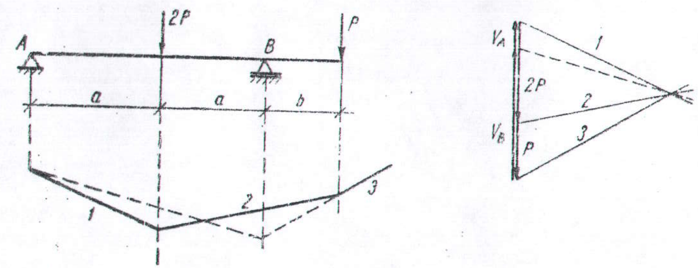


Fig. I.25.

Problema I.20 (fig. I.26). Pentru ca un corp să fie în echilibru trebuie ca forțele ce acționează asupra lui să fie concurente într-un punct ($M=0$). Reacțiunea din reazemul B are direcția cunoscută, perpendiculară pe planul de rezemare. În cazul de față este verticală. Direcția reacțiunii din articulația A trebuie să treacă prin punctul C de intersecție al direcției R_B cu direcția forței P.

Cunoscînd direcțiile reacțiunilor din reazemele A și B, mărimea lor rezultă din poligonul închis al forțelor.

Problema I.21 (fig. I.27). Corpul BC nefiind solicitat decît de forţele de legătură din B şi C, pentru echilibru trebuie ca aceste două forţe să fie coliniare, egale şi de sens contrar.

Corpul AC trebuie să fie în echilibru, sub acţiunea forţelor P. R_C şi R_A.

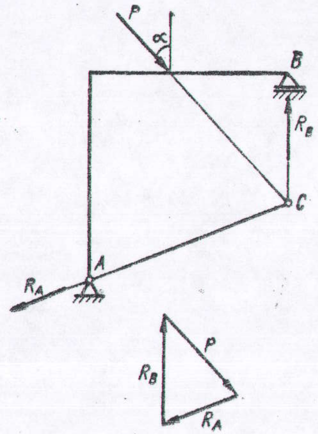


Fig. I.26.

Cunoscînd direcţia R_C, se determină punctul de intersecţie D al acestei reacţiuni cu direcţia forţei P, prin care trebuie să treacă şi R_A.

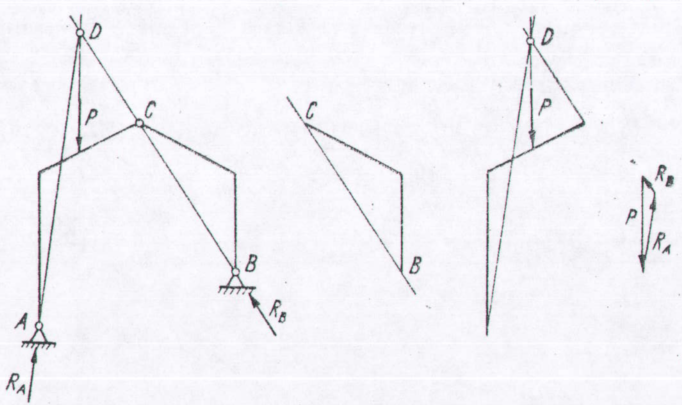


Fig. I.27.

Din triunghiul forţelor se determină R_A şi R_C şi apoi $R_B = R_C$.

Problema I.22 (fig. I.28). Determinarea reacţiunilor se face considerînd că sistemul este acţionat numai de forţa P şi se obţin reacţiunile R'_A şi R'_B,

apoi, considerînd că este acţionat de forţa $2P$ se determină R''_A şi R''_B (ca la problema precedentă). Reacţiunile reale se obţin din însumarea reacţiunilor parţiale, şi anume:

$$\overline{R}_A = \overline{R}'_A + \overline{R}''_A$$
$$\overline{R}_B = \overline{R}'_B + \overline{R}''_B.$$

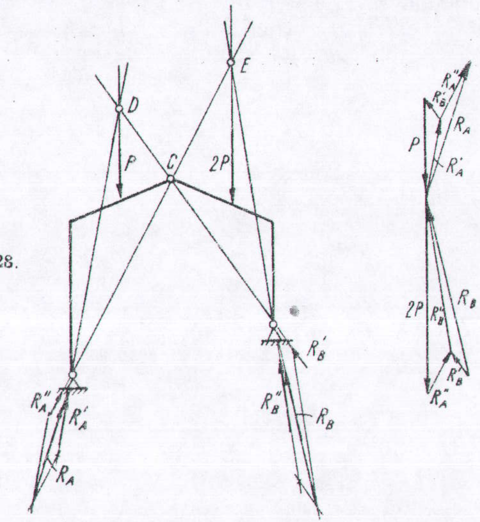


Fig. I.28.

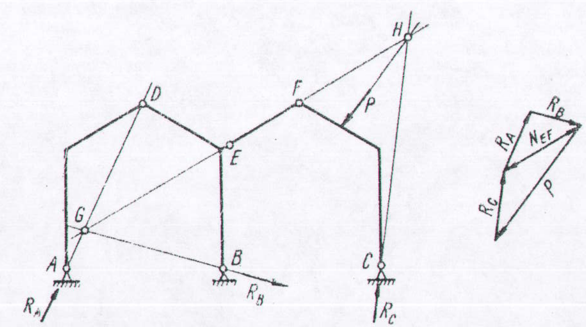


Fig. I.20.

Problema I.23. Să se determine direcţia şi sensul reacţiunilor la structura din figura I.29.

Bara EF fiind dublu articulată şi neîncărcată, forţele de legătură din articulaţiile E şi F sînt coliniare avînd direcţia barei EF.